

(Maria Cantoni, 2004)

Sintesi di un lavoro di introduzione alla geometria

Nota. In tale contesto sono state coinvolte le classi delle professoresse Elisabetta Del Brenna (SMS “F. Gonin” di Giaveno (Torino)) e Laura Manassi (SMS “A. Peyron” di Torino) **in un lavoro didattico di “costruzione del sapere”: gli allievi sono i protagonisti di ciò che si conquista.**

“La geometria si presenta dentro la realtà, come semplificazione di una realtà, come «scarnificazione» della realtà fino a ridurla al suo puro scheletro, anzi ad una struttura mentale, limite ideale della struttura fisica. Perché i punti, le rette, i piani della geometria razionale sono «enti razionali», costruzioni della ragione, astrazioni, che aderiscono però alla struttura delle realtà «empiriche» dalle quali sono dedotte.”

Dalle osservazioni materiali ed elementari la nostra mente è in grado di costruire dei concetti che abbiano carattere astratto e generale, ma ciò è possibile solo se essa attua una individuale creazione di relazioni. L'apprendimento non può ridursi ad assunzione passiva di informazioni.

Tutto ciò è inserito nel contesto più ampio della conoscenza (come strumento essenziale per l'uomo) e del suo significato. A questo proposito vogliamo fare riferimento al pensiero di Hans Freudenthal' attualissimo, nonostante gli anni trascorsi dalla sua morte. Egli ha posto il problema della conoscenza come fatto coinvolgente l'individuo in prima persona, come suo libero rapporto con la realtà e la verità, come suo inevitabile rapporto, inizialmente in qualità di discente, con una **guida capace di farlo reinventare.**

Schematicamente si può dire che i ragazzi, opportunamente guidati in una discussione, sono portati a **formulare ed a sviluppare** il problema relativo e a proseguire con un resoconto dell'attività svolta, facendo uso alla fine di un linguaggio matematico appropriato (naturalmente relativo all'età) in modo da riassumere e sistemare convenientemente le conoscenze raggiunte. Abbiamo bisogno di comunicare sia per descrivere che per agire, ci occupiamo quindi di **comunicazione e di condivisione.**

Nell'attualità vediamo l'uso di strumenti come abituale ricchezza per l'operare dell'uomo. Evolvendo intellettualmente insieme al progresso tecnologico, egli cerca di approfondire la conoscenza e dominare “le cose” col privilegio di poter economizzare i tempi e migliorare i metodi.

Gli spunti per esemplificare il nostro pensiero sarebbero potuti essere molti. Abbiamo privilegiato l'inizio del percorso sulla geometria perché riteniamo che i problemi che riscontriamo nella scuola derivino sostanzialmente dalle scelte iniziali e che sia relativamente difficile correggere in itinere dei comportamenti mentali già sedimentati dall'abitudine. Forse bisognerebbe guardare già alla scuola elementare se non alla scuola materna, ma dovendoci occupare di ciò che ci compete, possiamo ancora sperare che l'età degli allievi conceda una prima e nuova presa di coscienza abbastanza matura per costruire, ma anche ricostruire.

Nota Non si fa preventivamente un tentativo di valutazione di ciò che i ragazzi conoscono dalla scuola frequentata in precedenza o per l'accostamento a realtà

descritte dall'adulto in termini di parole prese anche dalla "geometria". Il tutto sarà osservato e preso in considerazione durante la discussione, la riflessione, la nuova costruzione. Parliamo di nuova costruzione in ogni modo perché, anche se ci trovassimo semplicemente ad operare un'evoluzione, cambierebbe il "livello" dovuto ad una maggiore età.

In classe è presente costantemente una discussione carica di problemi aperti, che dovrebbe nascere "solo" da spontanee occasioni di nuovi interessi (da non poter essere ignorati) o come esigenza per rispondere ad interrogativi già presenti. Essa viene condotta opportunamente, ma velatamente in alcune direzioni, sfruttando quasi esclusivamente le domande e le risposte dei ragazzi.

Per quanto riguarda l'uso di software di geometria, vogliamo sottolineare che, quando gli allievi l'accostano per la prima volta, si intersecano problemi di geometria e di uso del software e ciò non è irrilevante. La semplicità, e nello stesso tempo la "dinamicità" delle costruzioni di cui abbiamo bisogno inizialmente, ci paiono però particolarmente adatte per affrontare i due problemi contemporaneamente.

Non riusciremo certamente a chiarire in questo breve scritto la realtà di un lavoro di classe in tale direzione, ma speriamo di lasciare qualche idea.

1. In una classe prima

Stralcio da un **primo** esempio per evidenziare la metodologia di lavoro.

A. IL PROBLEMA DELLA COMUNICAZIONE: "il telefono"

B. IL PROBLEMA DELLA CONDIVISIONE: "le parole"

C. IL PROBLEMA DELL'ELABORAZIONE

A. IL PROBLEMA DELLA COMUNICAZIONE: "il telefono"

LO SPUNTO

Un quotidiano del mattino riporta le parole di un architetto designer: Vico Magistretti e parla di una mostra a Genova.

"A me, la moda non interessa, mi interessano invece i concetti. E la caratteristica di un concetto è la semplicità, la geometria di un triangolo, di un cerchio. Anche i miei schizzi, che non sono dei bei disegni, cercano di dare forma a qualche cosa che ha avuto un'origine semplice, tanto che puoi spiegarla al telefono...."

Diciamo due parole sull'uomo e il contesto nel quale è vissuto e prodotto i suoi lavori. Si parla di un certo "razionalismo" e del fatto che per l'architetto ciò significava anche semplicità di idee. Allora si domanda il significato della parola "intelligenza". "Punta sul ragionamento, su un idealismo (col significato di idea) che ha vissuto lui", "idee..." "Io so, ma non so spiegarlo", "Io l'ho già sentita, ma non so il significato", "io non so"...

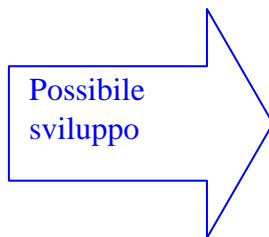
E così prosegue il dialogo:

"Conoscete qualche parola che la richiami?"

Usiamo anche il vocabolario, "conoscenza che si fonda sulla ragione, da ratio..."; in un'altra accezione si parla addirittura di una borsa particolare, ebraica, da portare in un

determinato modo, che rappresenta le tribù d'Israele e con la quale si entrava nel Tempio di Gerusalemme.

Il vocabolario, nella sua struttura, non semplifica il discorso per la complessità dei problemi linguistici a cui porta e per il fatto che è comunque essenziale capire, all'interno della spiegazione, il significato di tutte le parole, altrimenti bisogna ricominciare. Accettiamo allora di avere tutti "un'idea" in testa della parola ragione che esplicitiamo dicendo che ha "ragione" un uomo che "pensa".

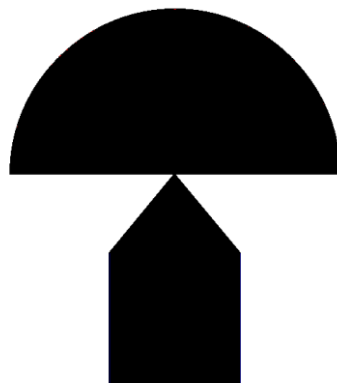


Qui potrebbe nascere tutto il problema delle parole "primitive" che non si definiscono, ma al più si "rafforzano" con sinonimi, e da cui sempre si partirà, per arrivare ad una "definizione"

Sfruttiamo a questo punto il discorso dell'architetto e del telefono.

"Saremmo in grado di comunicare una delle sue "forme" al telefono in modo che chi ascolta sia in grado di riprodurla? Questa semplicità di idee che egli ha messo nelle cose è davvero facile da comunicare a tutti?"

Ecco la forma: viene proiettato il disegno di una sua lampada. Tutti fanno uno schizzo e scrivono la frase con cui comunicare l'immagine vista ad una compagna che nel frattempo è uscita. La compagna dovrà poi eseguire alla lavagna.



Inizialmente, nel proiettare, la figura appare sfuocata ed anche alterata per una particolare posizione della stessa.

Esperienza a cui è possibile richiamarsi in seguito.

L'occhio "osserva" una trasformazione dell'oggetto. Il legame tra l'oggetto e la sua trasformazione è casuale? Esistono degli "invarianti"?

Trascuriamo ovviamente le descrizioni di tutti gli allievi e i disegni relativi. Interrogata su come si era comportata durante i disegni (le descrizioni si sono influenzate le une con le altre?), l'autrice ha detto di aver cercato di riprodurre quello che le veniva detto di volta in volta non essendo riuscita a farsi un'immagine di quello che sarebbe potuta essere la "forma" da riprodurre. Vediamo di isolare le "**parole**" che sono state usate nelle descrizioni, per sapere dove i ragazzi le abbiano imparate, se le usano normalmente nella vita di tutti i giorni e tutti con lo stesso significato.

Nota:

All'interno delle descrizioni dei ragazzi possono esserci frasi insolite, logicamente incoerenti, assurde, scorrette. Possiamo vederlo immediatamente con un esempio trovato: "vertici della circonferenza". Esse non vengono rilevate esplicitamente ed addirittura vengono lasciate "usare" perché il fine del lavoro è proprio di raggiungere "una conoscenza", superando anche e proprio gli errori "concettuali" già presenti nel vissuto dei ragazzi. Quando si crederà di aver superato il problema, si potrà eventualmente discutere il cambiamento avvenuto.

B. IL PROBLEMA DELLA CONDIVISIONE "le parole"

Viene proiettata una pagina su cui sono elencate le "parole" usate e da discutere.

Abbiamo tutti la stessa comprensione delle stesse? Ci sono parole "più comprensibili"?

Trascuriamo il seguito della discussione fino al momento in cui i ragazzi commentano che, secondo loro, alcune parole hanno significati uguali per tutti ed altre no. Per esempio "vertici della circonferenza" va bene per tutti! Sarà vero?

Ecco come sono "disegnati" da due persone diverse:



(di fatto, poiché la lavagna per essere mostrata viene capovolta, il disegno originale "avrebbe" avuto l'arco "al di sopra", ma il ragazzino dice che va bene lo stesso)

Esperienza a cui sarà possibile collegarsi in seguito per la....

simmetria (1)

I “vertici della circonferenza” sono molto diversi!

“Alle elementari avete sentito parlare di *vertici della circonferenza*?”

“Ma no, abbiamo detto dei vertici della semicirconferenza!”

“Ma di fatto che cosa è stato disegnato? C’è qualche parola per dire ciò che è stato disegnato o devo per forza dire vertici della semicirconferenza?”

“Ma sono due punti!”

“Se facessimo vedere il disegno a “qualcuno” (*che non ha partecipato alla discussione*) che cosa direbbe?” “Che sono due punti!”

“Ma noi abbiamo detto una cosa e ne è stata fatta un’altra! Sono stati fatti due punti, avete detto un punto d’inizio e un punto di fine.”

“E nell’altro disegno?”

“Anch’io volevo fare due punti e li ho segnati con una crocetta e poi ho anche fatto la semicirconferenza.”

“Nell’altro disegno invece si è ritenuto di fare solo i punti.”

“Si può dire se sia meglio un disegno piuttosto che l’altro?”

“No, uno voleva precisare da dove venissero “i vertici”, nell’altro non si è ritenuto necessario fare la precisazione, perché si è creduto che erano “i vertici” da evidenziare. Ma sono stati fatti dei ... “punti”. Vuol dire allora che la parole “vertice” vi porta ad immaginare un **punto**?” “Sì.”

“Ma allora perché è stato chiamato in altro modo?”

“Perché è un punto di partenza. È un punto che era “specificato”. “

“Ma se non avessimo l’idea di punto potremmo capire quella di vertice?” “No”.

“La parola punto, pensate che sia compresa da tutti nello stesso modo?”

“Qualcuno vuol “fare” un punto alla lavagna? Quello lì è più piccolino...”

“Serve stabilire la dimensione?”

“Questo qui, rispetto all’altro vuol dire un’altra cosa?” “No”.

“Che cosa indica “quel segno lì”?Ma allora che cosa significa?”

Un punto!

Allora, per ora, possiamo accettare che tutti abbiano la stessa idea per la parola punto?

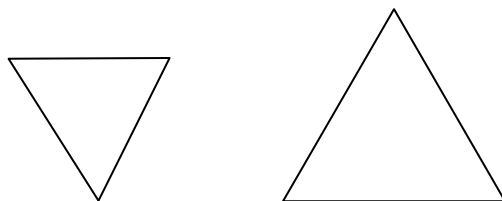
.....

“Anche la parola triangolo va bene per tutti!”

“Vuoi provare a disegnare un “triangolo” dietro alla lavagna, e tu qui sull’altra lavagna?”

Quando il primo disegno è fatto, perché sia visto, si capovolge la lavagna.

I due disegni alla fine compaiono così:



Vedi (1)

La cosa non convince e per due motivi, perché comunque i due triangoli non sarebbero sovrapponibili, ma soprattutto perché chi ha disegnato il primo dice che quello “capovolto” non va bene.

“Ma allora io non riconosco più qualche cosa se viene poi posta in modo diverso? Forse ci sarebbero delle **cose da precisare....**”

La discussione prosegue.....

Sperando di aver già dato un’idea di ciò che succede in classe proseguiamo solo con altri momenti significativi

.....

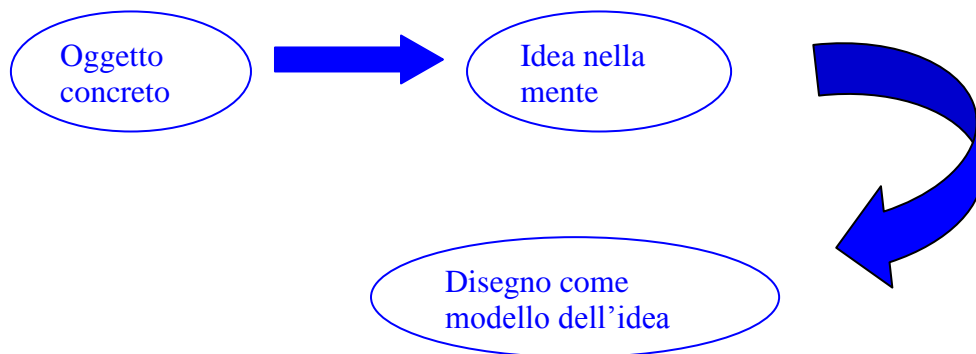
Si arriva poi al segmento, alla retta e alla semiretta. Non tutte le idee espresse paiono chiare, non è possibile pensare che nascano nello stesso modo per tutti, per poter costruire su di esse. Decidiamo di approfondire ponendo il problema del contenuto di “informazione” del “possedere due punti”.

Ne nasce una discussione che porta **tutti** ad affermare che contemporaneamente ai due punti si ha anche un segmento e solo **3 ragazzi** (diversi gli uni dagli altri) ritengono di avere determinata anche una retta o una semiretta. Perché?

“Ci sono nella realtà dei “segmenti?”” “Sì, un gesso, una biro, questo piccolo righello,”...

“E sono **il segmento?**”

“Forse sono un modello.” “E il segmento dove sta? **Esiste?**” “Già, **nella nostra mente!** Ma è **suggerito** forse dagli oggetti che abbiamo elencato.” “E del disegno che ne facciamo? **E’ il segmento?**” “Anche lui è **un modello! Di quello che abbiamo in testa!**”



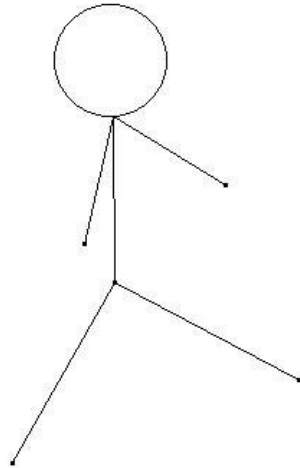
“La realtà ci suggerisce il segmento, ma forse non la retta. È la nostra mente che supera la realtà e pensa qualche cosa da prolungare “nello stesso modo” fino all’infinito!”

.....

3. Stralcio da un **secondo** esempio in una classe seconda con una collega Vedremo concretamente, richiamando le “figure”, come le caratteristiche dello strumento accompagnino ed esaltino il percorso di conoscenza.

IL PROBLEMA DELLA COMUNICAZIONE

Ne deriva una discussione su come tentare di comunicare “alcune cose” che hanno in testa in un certo senso anche i bambini, con dei “segni” che **diventano di tutti**.



Abbiamo notato che anche i bambini riassumono col disegno ciò che vedono, con poche linee, che però rendono le idee chiare a chi sta osservando. E' come se disegnassero le cose fondamentali. Sono disegni stilizzati in cui rappresentano (come sono capaci) figure astratte dell'oggetto che vedono. In pratica i bambini rappresentano gli arti con un segmento! Nello stesso tempo i loro disegni rappresentano solo pochissime caratteristiche dell'oggetto in questione.

Es. la caratteristica della testa è la sua rotondità

La caratteristica delle braccia e delle gambe è che sono diritte!.....

Tutto il mondo diviene capace di comunicare certe realtà nello stesso modo.

“Ciò che facciamo come disegno è un’immagine, un modello di quello che abbiamo in mente. Per descrivere il modello possiamo disegnare oppure... Di fatto per esempio se io dico “quadrato”, uno pensa al “quadrato”, a tutto ciò che è il quadrato. Ma come faccio io ad averlo in mente come ce l’hai tu? Come facciamo a rendere partecipe un altro di quello che abbiamo in mente?”

“Lo spieghiamo a parole e supponiamo che l’altro capisca il significato di tutte le parole. Se ciò non fosse dovrebbe andare sul vocabolario o in qualche altro modo farsi dare il significato delle parole che non sa. E questo lavoro fino a dove può continuare?”

“Non può andare all’infinito, ma fino a che si trovano parole di cui si sa certamente il significato. E quali sono queste parole? Ci sono parole che non si spiegano se non con sinonimi”.

“Abbiamo già visto che la **parola insieme** è di questo tipo. **Poi da un punto di vista scientifico le parole assumono un significato particolare per dare una comunicazione precisa. La matematica e le scienze sono creative per una parte della loro attività, ma quando comunicano devono essere “precise”, cioè devono essere capite ed usate da tutti nello stesso modo. Così è anche quando si comunica con un disegno.** Guardando i disegni fatti con l’insegnante di educazione artistica avete parlato di prospettiva per disegnare”.

“Ma la “prospettiva” disegna a caso?”

“Deve seguire delle regole precise in modo che chiunque riconosca la “forma” che voglio comunicare”.

“Adesso quello che ci stiamo domandando è: da dove vengano quelle regole”

“Da un libro”.

“Ma un libro è scritto da una persona”.

“Per esempio, a proposito della prospettiva, avete mai visto qualche cosa che non sia stata disegnata in quel modo?”

“Le figure egizie”.

“Allora ci sono voluti millenni di storia dell’uomo, di un uomo che si è fatto le domande, ha cercato delle regole, **le regole del “gioco”**.”

A questo punto vogliamo sapere se dobbiamo accettare “le regole del gioco” come sono, cioè accettare che qualcuno ce le dica o **entrare anche noi nella “scoperta”**. Per esempio una regola del gioco che abbiamo già scoperto è che nel definire non si può andare indietro all’infinito ed abbiamo già evidenziato alcune “idee” della nostra mente che diamo per scontate per tutti.”

Ecco una breve parte della nostra discussione.

“AIUTO, FARE GEOMETRIA! Questa frase è comune. E’ possibile sapere perché viene facilmente detta?”

“Perché pensando ai miei ricordi non ritrovo più niente!”

“Ma che cosa devi ricordare?”

“Ma che cos’è la geometria?”

“...è un’arte!”

“No, io non sono d’accordo, perché tutti devono farla uguale!”

“Ce la fanno fare...”

“Ma a scuola si fanno le cose perché ce le fanno fare?”

“Ma che cos’è la geometria? A che cosa serve?”

“Per avere un’immagine più chiara delle cose...”

“E poi per poter comunicare, anche con le parole...”

“La geometria è una produzione fatta dalla mente dell’uomo”

“L’uomo non ha triangoli, esagoni, ecc. intorno a sé, sono nella sua mente, non in natura. C’è bisogno di comunicare, ma non è un bisogno che ti fa vivere fisicamente. Ma interiormente.”

“L’uomo ha iniziato a costruire la geometria per avere un’immagine più chiara delle forme che gli stanno intorno:”

“La comunicazione deve avere delle regole condivise da tutti”

“La geometria è nata per descrivere le forme degli oggetti . Le forme geometriche sono astratte e sono presenti come idee nella nostra mente...così abbiamo capito che il segmento insieme alla retta e al punto sono le basi della geometria e non hanno bisogno di spiegazioni perché “sono impresse nella mente di tutti” e “suggerite” dall’esperienza e dalla realtà.”

“Già alla fine della nostra discussione siamo passati da un “gioco” senza regole ad un “gioco” con le regole, regole che permettono la comunicazione!”

“Segmento, retta, punto, piano: il primo approccio al modello. Vedremo poi che l’uomo aveva iniziato con dei modelli concreti, per esempio associando ad un punto un granellino di sabbia. Poi si è accorto che di fatto alcune cose non avrebbero “funzionato”. Noi tutti per esempio ci rendiamo conto che facciamo un modello di punto usando uno strumento e che a seconda dello strumento “il segno” che facciamo risulta diverso. E allora?

Col “gioco” del gesso abbiamo già capito molte cose. Il gesso lascia un segno “enorme”, ma avremmo potuto fare un segno più sottile che avrebbe comunicato la stessa cosa.”

.....

“Durante le discussioni fatte è emersa molte volte la parola **distanza**. Non ci siamo domandati se per tutti quella parola avesse lo stesso significato. Forse varrebbe la pena di domandarcelo ora”.

“Per andare da una certa città ad un'altra la “distanza” è maggiore di....., così impiegheremo più tempo...”

“Proviamo a schematizzare con un disegno quello che volevamo dire:

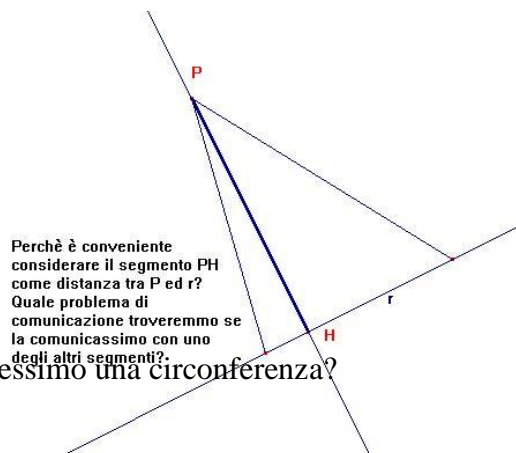


“La comunicazione più semplice e chiara è parlare di **segmenti**. La distanza tra due punti A e B è “il segmento AB”.

E come confrontiamo due segmenti?”

.....

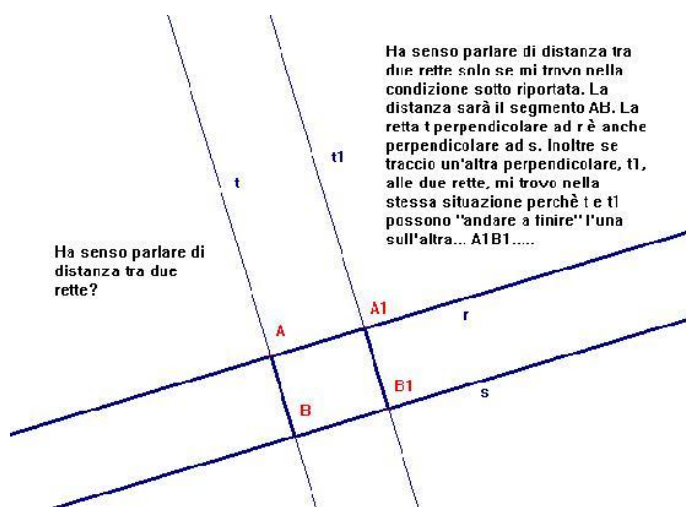
“E se allargassimo il discorso e volessimo parlare di distanza di un punto da una retta?”



E se invece di una retta avessimo una circonferenza?

.....

E la distanza tra due rette?



“Che cosa intendete per condizione riportata nel disegno?”

“Ha senso parlare di distanza tra due rette *se queste sono parallele.*”

“Ma che cosa sono le rette parallele?”

“Non si incontrano mai.”

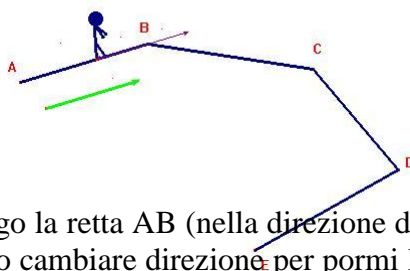
“Ma noi per ora abbiamo visto che compiono dei movimenti particolari che le portano a sovrapporsi, è la stessa cosa?”

“Se prima o poi si incontrassero, la “distanza “tra il punto d’incontro ...qui c’è qualche cosa che non torna. Non si può più parlare di distanza come abbiamo fatto vedere prima.”

.....

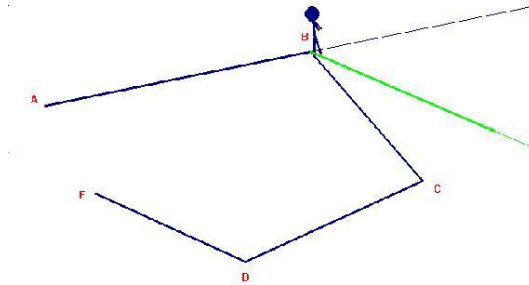
ANALIZZIAMO ORA QUESTA SITUAZIONE

Portiamoci su di un percorso. Modellizziamo con dei tratti rettilinei ed analizziamo i nostri comportamenti nel seguirne la traccia.



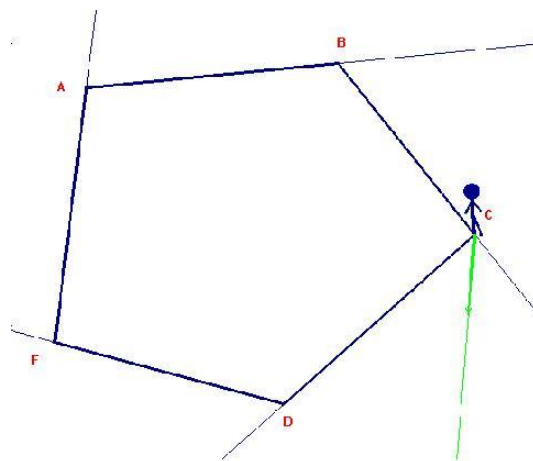
Cammino da A verso B lungo la retta AB (nella direzione della retta AB), arrivato in B, per proseguire verso C, devo cambiare direzione per pormi lungo la retta BC. Il disegno

successivo evidenza "l'angolo" come rotazione di cui devo tener conto perché il mio comportamento abbia successo.



Ciò che ho eseguito per passare da AB a BC vale per ogni altro estremo. Per percorrere il cammino compio **delle rotazioni (degli angoli come rotazione, come cambiamento di direzione).**

Vediamo ora una situazione analoga dove però il percorso si richiuda su se stesso, il punto E coincide col punto A:



Il percorso "racchiude" una regione (una parte di piano delimitata dal percorso stesso), un **poligono**. Quegli angoli evidenziati sono **comunque interessanti** nel senso detto prima. Permettono di **percorrere** il confine del poligono.

A questo punto torniamo al nostro problema di comunicazione. Voi stessi avete detto di "chiamarli" **angoli esterni**: diamo un nome a quegli angoli in modo da poterli indicare senza spiegare tutta l'analisi fatta. Di fatto voi avete spontaneamente dato a quegli

angoli il nome che hanno assunto convenzionalmente. Se vi chiedessi allora che cosa si intende, convenzionalmente, per angoli esterni di un poligono, rispondereste.....

Vale però la pena di sottolineare alcune cose perché è esperienza comune che non sia così ovvio accettare (ricordare) la terminologia data. Guardiamo da vicino un poligono:

.....